



BUTTERWORTH 2. KERTALUVUN KAISTANPÄÄSTÖSUOTIMEN SUUNNITTELU

Pasi Vähämartti

Raportti
Joulukuu 2006



JYVÄSKYLÄN
AMMATTIKORKEAKOULU
Informaatioteknologian instituutti

Tehtävämäärittely:

Suodatintyyppi: Butterworth kaistanpäästö (BP)

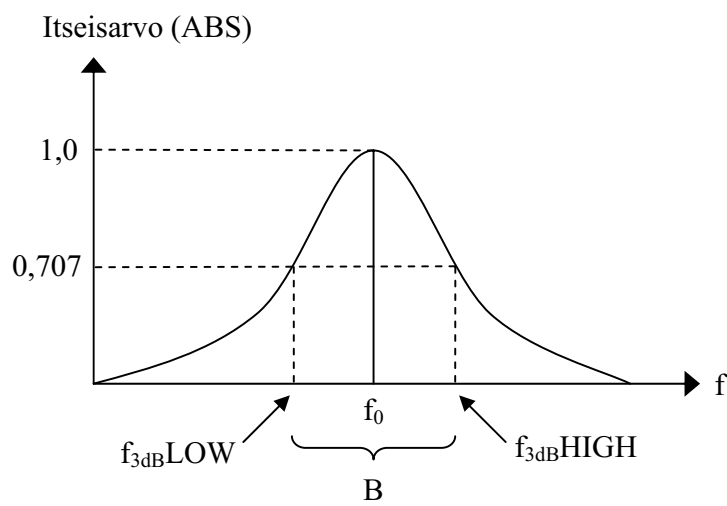
Kertaluku: $N = 2$

F_s : $6 \text{ kHz} = 6 \cdot 10^3 \text{ Hz}$

f_0 : 1000 Hz

B: 400 Hz

BP - kaistanpäästö suodin



Muunnetaan normalisoitu analoginen LP – suodatin todelliseksi BP – suotimeksi taajuusmuunnoksella:

$$\text{Normalisoitu } H(s): \quad H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot s + s^2}$$

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 1000 \text{ rad/s} = 6283 \text{ rad/s}$$

$$B = 2\pi \cdot 400 \text{ rad/s} = 2513 \text{ rad/s}$$

$$\text{Taajuusmuunnos:} \quad s \Rightarrow \frac{s^2 + \Omega_0^2}{B \cdot s} = \frac{s^2 + 6283^2}{2513 \cdot s} = \frac{s^2 + 39478418}{2513 \cdot s}$$

Todellinen BP-suodattimen siirtofunktio:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{s^2 + 39478418}{2513 \cdot s} + \left[\frac{s^2 + 39478418}{2513 \cdot s} \right]^2}$$

$$H(s) = \frac{6316547 \cdot s^2}{s^4 + 3554 \cdot s^3 + 85273382 \cdot s^2 + 140318390400 \cdot s + 1,5585 \cdot 10^{15}}$$

Digitaalisen suodattimen muodostamiseksi on tehtävä taajuuskorjaus:

$$f_{L3dB} = 800 \text{ Hz}$$

$$\Omega_{L3dB} = 2\pi \cdot 800 \text{ rad/s} = 5027 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{L3dB_ANA} = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_{L3dB} \cdot T}{2}\right) = \frac{2}{1/6000} \cdot \tan\left(\frac{5027 \cdot 1/6000}{2}\right) = 5343 \text{ rad/s}$$

$$f_{H3dB} = 1200 \text{ Hz}$$

$$\Omega_{H3dB} = 2\pi \cdot 1200 \text{ rad/s} = 7540 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{H3dB_ANA} = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_0 \cdot T}{2}\right) = \frac{2}{1/6000} \cdot \tan\left(\frac{7540 \cdot 1/6000}{2}\right) = 8719 \text{ rad/s}$$

$$B = \Omega_{H3dB_ANA} - \Omega_{L3dB_ANA} = 8719 \text{ rad/s} - 5343 \text{ rad/s} = 3376 \text{ rad/s}$$

$$f_0 = 1000 \text{ Hz}$$

$$\Omega_0 = 2\pi \cdot 1000 \text{ rad/s} = 6283 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_{ANA} = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\Omega_0 \cdot T}{2}\right) = \frac{2}{1/6000} \cdot \tan\left(\frac{6283 \cdot 1/6000}{2}\right) = 6928 \text{ rad/s}$$

Taajuusmuunnos: $s \Rightarrow \frac{s^2 + \Omega_0^2}{B \cdot s} = \frac{s^2 + 6928^2}{3376 \cdot s} = \frac{s^2 + 48000000}{3376 \cdot s}$

Todellinen BP-siirtofunktio:

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \cdot \frac{s^2 + 4800000}{3376 \cdot s} + \left[\frac{s^2 + 48000000}{3376 \cdot s} \right]^2}$$

$$H(s) = \frac{11395797 \cdot s^2}{s^4 + 4774 \cdot s^3 + 107395797 \cdot s^2 + 229154602536 \cdot s + 2.304 \cdot 10^{15}}$$

Bi-linearimuunnoksen tekeminen:

$$H(z) = \frac{11395797 \cdot s^2}{s^4 + 4774 \cdot s^3 + 107395797 \cdot s^2 + 229154602536 \cdot s + 2.304 \cdot 10^{15}} \quad \left| s = \frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T \cdot (1 + z^{-1})} \right.$$

$$= \frac{11395797 \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T \cdot (1 + z^{-1})} \right]^2}{\left[\frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T \cdot (1 + z^{-1})} \right]^4 + 4774 \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T \cdot (1 + z^{-1})} \right]^3 + 107395797 \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T \cdot (1 + z^{-1})} \right]^2 + 229154602536 \cdot \frac{2 \cdot (1 - z^{-1})}{T \cdot (1 + z^{-1})} + 2.304 \cdot 10^{15}}$$

$$= \frac{11395797 \cdot 4 \cdot T^2 \cdot (z-1)^2 \cdot (z+1)^2}{16 \cdot (z-1)^4 + 4774 \cdot 8 \cdot T \cdot (z-1)^3 \cdot (z+1) + 107395797 \cdot 4 \cdot T^2 \cdot (z-1)^2 \cdot (z+1)^2 + 229154602536 \cdot 2 \cdot T^3 \cdot (z-1) \cdot (z+1)^3 + 2.304 \cdot 10^{15} \cdot T^4 \cdot (z+1)^4}$$

$$\left| T = \frac{1}{6000} = 1.666 \cdot 10^{-4} \right.$$

$$= \frac{1,2662 \cdot (z-1)^2 \cdot (z+1)^2}{16 \cdot (z-1)^4 + 6,3653 \cdot (z-1)^3 \cdot (z+1) + 11,9329 \cdot (z-1)^2 \cdot (z+1)^2 + 2,1218 \cdot (z-1) \cdot (z+1)^3 + 21,7777 \cdot (z+1)^4}$$

$$H(z) = \frac{0,0332 - 0,0663 \cdot z^{-2} + 0,0332 \cdot z^{-4}}{1 - 1,7115 \cdot z^{-1} + 2,1677 \cdot z^{-2} - 1,2671 \cdot z^{-3} + 0,5556 \cdot z^{-4}}$$

Analoginen todellinen suodatin:

Tutkitaan todellisen analogisen siirtofunktion oikeellisuutta:

Laskettu arvo:

$$H(s) = \frac{6316547 \cdot s^2}{s^4 + 3554 \cdot s^3 + 85273382 \cdot s^2 + 140318390400 \cdot s + 1,5585 \cdot 10^{15}}$$

Suodatinkertoimien tutkiminen:

Koodi:

```
f3dBL=800;
f3dBH=1200;
w3dBL=f3dBL*2*pi;
w3dBH=f3dBH*2*pi;

[b_ana, a_ana]=butter(2, [w3dBL w3dBH], 'bandpass', 's')
```

Matlabin antamat arvot:

```
b_ana=Column 1:    0
           Column 2:    0
           Column 3:  6.316546816697192e+006
           Column 4:    0
           Column 5:    0

a_ana=Column 1:    1.000000000000000e+000
           Column 2:  3.554306350526693e+003
           Column 3:  8.211510861706346e+007
           Column 4:  1.347056547839159e+011
           Column 5:  1.436355492750986e+015
```

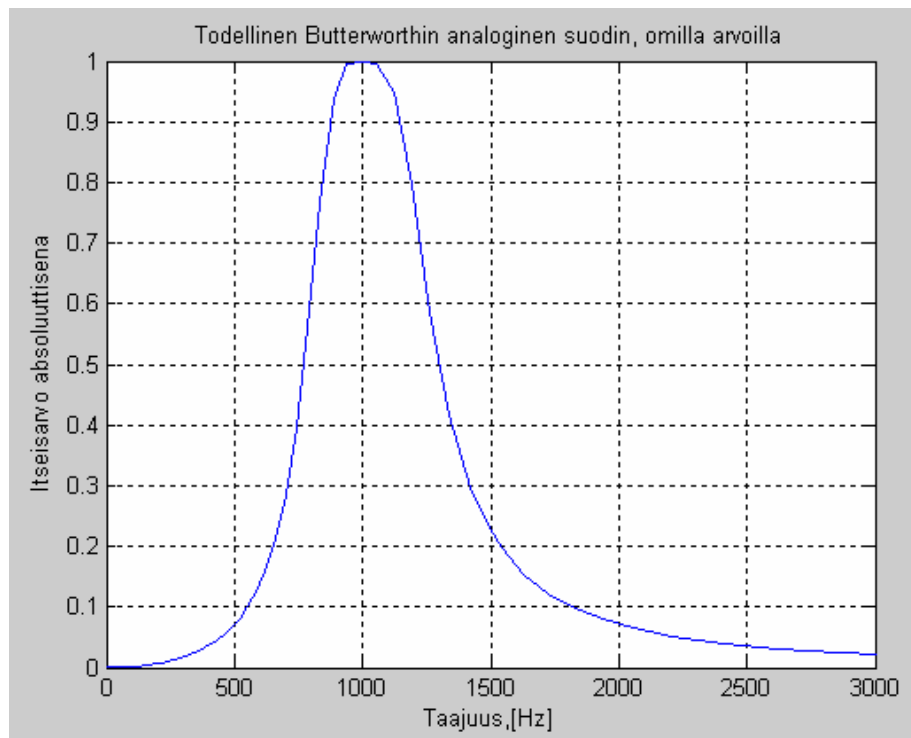
=> Matlabin antamat kertoimet poikkeavat hieman itse lasketuista arvoissa.

Tutkitaan minkälaisen kuvan matlab antaa itse lasketuilla arvoilla:

Koodi:

```
b_ana_oma=[0 0 6316547 0 0];  
a_ana_oma=[1 3554 85273382 140318390400 1.5585e15];  
  
[H_ana_oma,w]=freqs(b_ana_oma,a_ana_oma);  
Hm =abs(H_ana_oma);  
f=w/(2*pi);  
  
plot(f,Hm)  
axis([0 3000 0 1])  
grid  
title('Todellinen Butterworthin analoginen suodin, omilla arvoilla')  
xlabel('Taajuus,[Hz]')  
ylabel('Itseisarvo absoluuttisena')
```

Kuva:

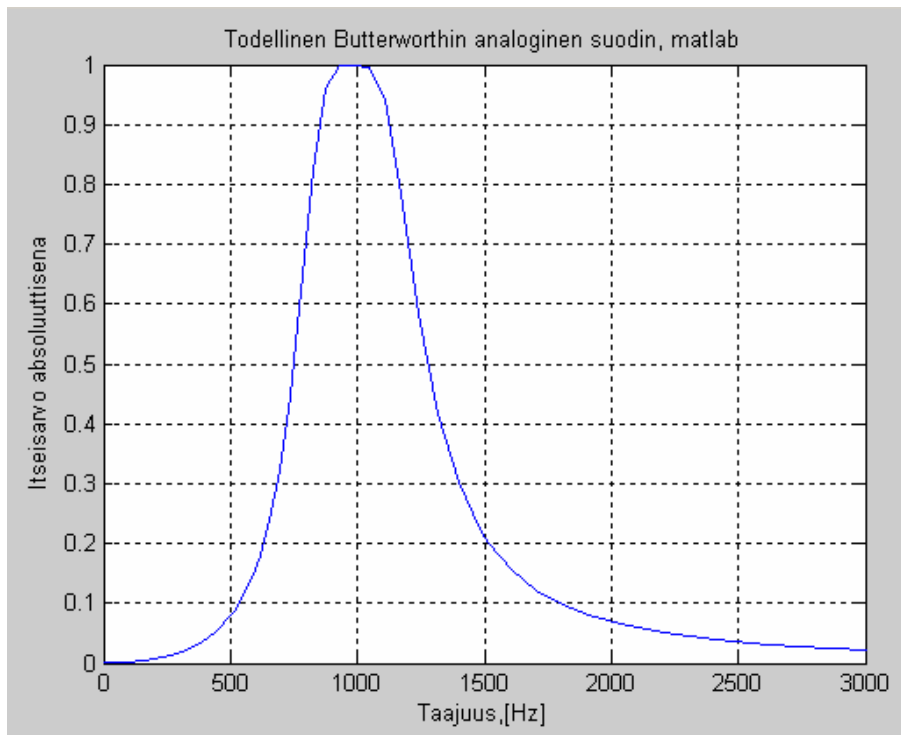


Matlabin muodostama suodatinkuva käyttäen tehtävänannon määrittämiä:

Koodi:

```
f3dBL=800;  
f3dBH=1200;  
w3dBL=f3dBL*2*pi;  
w3dBH=f3dBH*2*pi;  
  
[b_ana, a_ana]=butter(2, [w3dBL w3dBH], 'bandpass', 's');  
[H_ana, w]=freqs(b_ana, a_ana);  
Hm=abs(H_ana);  
f=w/(2*pi);  
  
plot(f,Hm)  
axis([0 3000 0 1])  
grid  
title('Todellinen Butterworthin analoginen suodin, matlab')  
xlabel('Taajuus,[Hz]')  
ylabel('Itseisarvo absoluuttisena')
```

Kuva:



Digitaalisen suodattimen muodostaminen:

Tutkitaan taajuuskorjatun siirtofunktion oikeellisuutta:

Laskettu arvo:

$$H(s) = \frac{11395797 \cdot s^2}{s^4 + 4774 \cdot s^3 + 107395797 \cdot s^2 + 229154602536 \cdot s + 2.304 \cdot 10^{15}}$$

Suodatinkertoimien tutkiminen:

Koodi:

```
[b_ana, a_ana]=butter(2, [5342.7442237 8718.51033606], 'bandpass', 's')
```

Matlabin antamat arvot:

```
b_ana=Column 1:    0  
        Column 2:    0  
        Column 3:  1.139579684535816e+007  
        Column 4:    0  
        Column 5:    0
```

```
a_ana=Column 1:  1.000000000000000e+000  
        Column 2:  4.774054219499013e+003  
        Column 3:  1.045573383198648e+008  
        Column 4:  2.223791250857004e+011  
        Column 5:  2.169768202476557e+015
```

=> Matlabin antamat kertoimet poikkeavat hieman itse lasketuista arvoissa.

=> Voidaan jatkaa bi-lineaarimuunnoksen tekemiseen.

Digitaalinen todellinen suodatin:

Tutkitaan todellisen digitaalisen siirtofunktion oikeellisuutta:

Laskettu arvo:

$$H(z) = \frac{0,0332 - 0,0663 \cdot z^{-2} + 0,0332 \cdot z^{-4}}{1 - 1,7115 \cdot z^{-1} + 2,1677 \cdot z^{-2} - 1,2671 \cdot z^{-3} + 0,5556 \cdot z^{-4}}$$

Suodatinkertoimien tutkiminen:

Koodi:

```
Fs=6000;  
f3dB=800;  
f3dBH=1200;  
w3dB=f3dB/(0.5*Fs);  
w3dBH=f3dBH/(0.5*Fs);  
  
[b_dig,a_dig]=butter(2,[w3dB w3dBH],'bandpass')
```

Matlabin antamat arvot:

```
b_dig= Column 1: 3.357180936764066e-002  
      Column 2: 0  
      Column 3: -6.714361873528132e-002  
      Column 4: 0  
      Column 5: 3.357180936764066e-002  
  
a_dig= Column 1: 1.000000000000000e+000  
      Column 2: -1.747682379250946e+000  
      Column 3: 2.195617597062464e+000  
      Column 4: -1.290972052531154e+000  
      Column 5: 5.532698896886839e-001
```

=> Matlabin antamat kertoimet poikkeavat hieman itse lasketuista arvoissa.

Tutkitaan minkälaisen kuvan matlab antaa itse lasketuilla arvoilla:

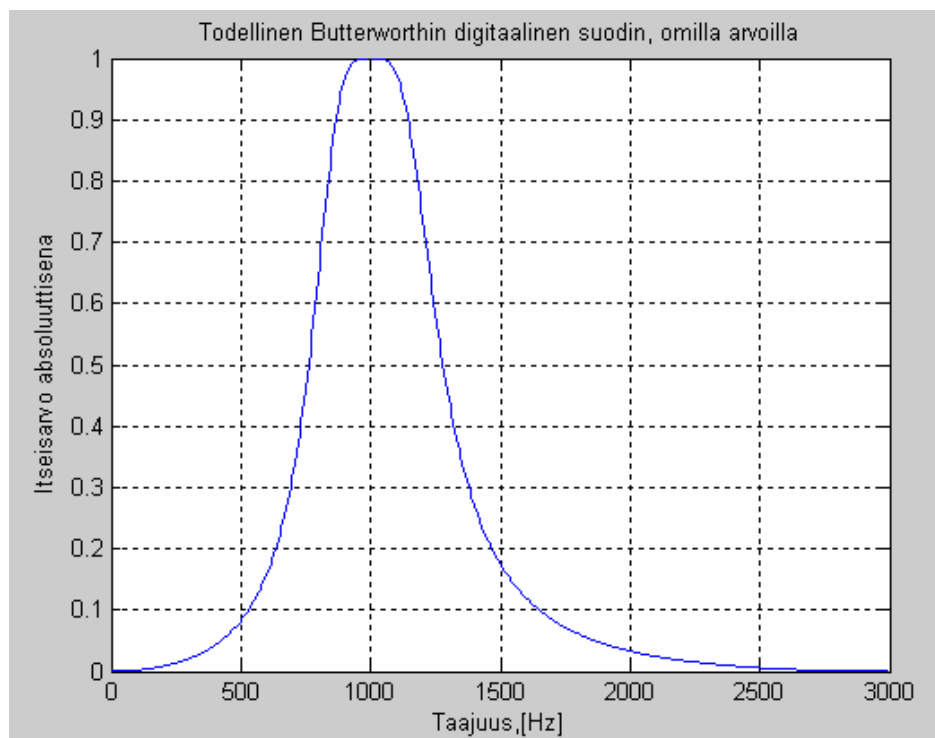
Koodi:

```
Fs=6000;
b_dig_oma=[0.0331485 0 -0.066297 0 0.0331485];
a_dig_oma=[1 -1.71151239 2.16768563 -1.26713098 0.55561859];

[H_dig_oma,w]=freqz(b_dig_oma,a_dig_oma);
Hm=abs(H_dig_oma);
N=length(Hm);
f=(0:(Fs/2)/N:(N-1)*(Fs/2)/N);

plot(f,Hm)
axis([0 3000 0 1])
grid
title('Todellinen Butterworthin digitaalinen suodin, omilla arvoilla')
xlabel('Taajuus,[Hz]')
ylabel('Itseisarvo absoluuttisena')
```

Kuva:



Matlabin muodostama suodatinkuva käyttäen tehtävänannon määrittämiä:

Koodi:

```
Fs=6000;
f3dB_L=800;
f3dB_H=1200;
w3dB_L=f3dB_L/(0.5*Fs);
w3dB_H=f3dB_H/(0.5*Fs);

[b_dig,a_dig]=butter(2,[w3dB_L w3dB_H],'bandpass')
[H_dig,w]=freqz(b_dig,a_dig);
Hm=abs(H_dig);
N=length(Hm);
f=(0:(Fs/2)/N:(N-1)*(Fs/2)/N);

plot(f,Hm)
axis([0 3000 0 1])
grid
title('Todellinen Butterworthin digitaalinen suodin, matlab')
xlabel('Taajuus,[Hz]')
ylabel('Itseisarvo absoluuttisena')
```

Kuva:

